Banque << Agro >>
Technologie et Biologie
A et AE - 0303 T

MATHÉMATIQUES 1
durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice, d'abaques et de tables est autorisé pour cette épreuve.

Dans ce problème, lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, on lui associe la fonction de l'intervalle $\mathcal{I} = [1, +\infty[$, à valeurs réelles, notée A, définie par

$$\forall x \in \mathcal{I},\ A(x) = \sum_{1\leq n\leq x} a_n.$$

Pour tout x réel on note $[x]$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif défini par la relation : $[x] \leq x < [x] + 1$, dont on admettra qu'elle équivaut à : $x - 1 < [x] \leq x$.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.
On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction A est constante sur l'intervalle $\mathcal{I}_n = [n, n+1[$, que ces intervalles sont disjoints deux à deux et que leur réunion vérifie : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{I}_n = \mathcal{I}$

Etudier la continuité de la fonction A sur l'intervalle $\mathcal{I}$.

2.a. On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$. Déterminer une forme simple de l'expression de $A(x)$.

2.b. On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur sur l'intervalle $\mathcal{I}_n$ de la fonction A associée.

3. Dans cette question $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, φ est une fonction à valeurs réelles admettant une dérivée continue sur $\mathcal{I}$ et x est un réel vérifiant $x \geq 1$. On note $p = [x]$ sa partie entière.

3.a. Montrer que :

$$\int_1^x A(u)\varphi'(u)du = \sum_{n=1}^{p-1} A(n)[\varphi(n+1) - \varphi(n)] + A(p)[\varphi(x) - \varphi(p)].$$

3.b. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{p-1} A(n)[\varphi(n+1) - \varphi(n)] = -\sum_{n=2}^{p-1}[A(n) - A(n-1)]\varphi(n) - A(1)\varphi(1) + A(p-1)\varphi(p).$$

TSVP

3.c. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x \in \mathcal{I},\ \sum_{1\leq n\leq x} a_n\varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(u)\varphi'(u)du.$$

4.a. Démontrer que pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a :

$$\sum_{1\leq n\leq x} \ln(n) = [x]\ln(x) - \int_1^x \frac{[u]}{u}du.$$

4.b. En utilisant un encadrement de la partie entière, montrer que pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a :

$$-\ln(x) - 1 \leq \int_1^x \frac{[u]}{u}du - x \leq -1.$$

4.c. Dans la suite du problème, on définit la fonction g par :

$$\forall x \in\ [2,+\infty[,\ g(x) = \frac{1}{\ln(x)}(\int_1^x \frac{[u]}{u}du - x).$$

Montrer que la fonction g ainsi définie est bornée sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

4.d. Déduire de l'égalité :

$$\forall x \in [2,+\infty[,\ g(x)\ln(x) = \int_1^x \frac{[u]}{u}du - x,$$

l'existence d'une suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{k=n} \ln(k) = n\ln(n) - n + \alpha_n\ln(n).$$

5.a. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{I}\ ,\ \sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n} = \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[u]}{u^2}du.$$

5.b. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a : $\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \leq \int_1^x \frac{[u]}{u^2}du \leq \ln(x)$.

5.c. Déduire de ce qui précède l'existence d'une fonction h, bornée sur $\mathcal{I}$, telle que :

$$\forall x \in \mathcal{I}, \int_1^x \frac{[u]}{u^2}du = \ln(x) + h(x).$$

5.d. Montrer qu'il existe une suite bornée $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \rho_n.$$

6.a. Démontrer que $\forall x \in \mathcal{I}$, on a :

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n}) = \sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{x}) + \int_1^x \frac{\sum\limits_{1\leq n\leq u} \frac{1}{n}}{u} du.$$

6.b. Déduire de la question 5 que, pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a :

$$\ln(x) \leq \sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n} \leq \ln(x) + 1$$

6.c. Déduire de l'inégalité précédente les deux inégalités :

$$\forall x \in \mathcal{I},\ -\ln(x)(\ln(x)+1) \leq (\sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n})\ln(\frac{1}{x}) \leq -\ln^2(x)$$

$$\forall x \in \mathcal{I},\ \frac{1}{2}\ln^2(x) \leq \int_1^x (\sum_{1\leq n\leq u} \frac{1}{n})\frac{du}{u} \leq \frac{1}{2}\ln^2(x) + \ln(x).$$

6.d. En déduire l'existence d'une fonction k, bornée sur $\mathcal{I}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathcal{I},\ \sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2}\ln^2(x) + k(x)\ln(x),$$

puis l'existence d'une suite bornée $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que pour tout n entier naturel on a :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}\ln(\frac{1}{k}) = -\frac{1}{2}\ln^2(n) + \sigma_n \ln(n).$$

FIN